Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques II

Date: Samedi 7 Juin 2014 **Heure :** 8 H **Durée:** 3 heures **Nb pages:** 4

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation.
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que $\bar{k}$ est inversible (pour la loi .) si et seulement si $k \wedge n = 1$.
   (b) En déduire le cardinal des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$ pour n premier.

2. On désigne par $\mathbb{R}_2[X]$ l'algèbre des polynômes de degré deux à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soit
$$q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(0)P(1) \end{array}$$
   (a) Vérifier que q est une forme quadratique.
   (b) Donner la décomposition de Gauss de la forme quadratique q.
   (c) En déduire l'existence d'une base (P_1, P_2, P_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ telle que: pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P = a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3$, on a $q(P) = a_1^2 - a_2^2$.

3. Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \end{array}$$
   (a) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
   (b) Résoudre le système
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0. \end{cases}$$

Problème

Pour tout entiers naturels non nuls m et n, on désigne par :

- $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels à n lignes et m colonnes.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $0_{n,m}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
- 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne usuelle c'est à dire $\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $< X, Y >=^t XY$.
- $S_n^+(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ {}^tA = A, \ \text{ et } \ < AX, X > \geq 0, \ \forall \ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right\}$.
- Pour tout sous espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ on note par :
  - ★ ${}^tA \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ la matrice transposée de A .
  - ★ $F^\perp = \left\{X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) :< X, Y >= 0 \quad \forall Y \in F\right\}$.
  - ★ $\operatorname{Ker} A = \left\{X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) : AX = 0_{n,1}\right\}$.
  - ★ $\operatorname{Im}(A) = \left\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{tel que } \exists X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) : AX = Y\right\}$.
  - ★ $A(F) = \left\{AX : X \in F\right\}$.
  - ★ A est dite injective si $\operatorname{Ker}(A) = \{0_{m,1}\}$.
  - ★ A est dite surjective si $\operatorname{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Partie I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient F et G deux sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. En déduire que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Partie II

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq 2$ et $0 < p < n$. Soit A appartenant à $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{R})$.
Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$S = \left[\begin{array}{c|c} I_p & {}^tA \\ \hline A & 0_{n-p} \end{array}\right].$$

A- Etude des propriétés de A, ${}^tA$ et S

1. Vérifier que S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. (a) Montrer que :
   i) $\mathrm{Ker}(A) = [\mathrm{Im}({}^tA)]^{\perp}$.
   ii) $\mathrm{Ker}({}^tA) = \left[\mathrm{Im}(A)\right]^{\perp}$.

   (b) En déduire que :
   i. $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(A) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}({}^tA)$.
   ii. $\mathcal{M}_{n-p,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}({}^tA) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(A)$.

   (c) i. Montrer que A est injective si et seulement si ${}^tA$ est surjective.
   ii. Montrer que, dans ces conditions, $p \leq n - p$.
3. (a) Montrer que :
$$\mathrm{Ker}(S) = \left\{ \left[\frac{0_{p,1}}{X_2}\right], \text{ avec } \quad X_2 \in \mathrm{Ker}({}^tA) \right\}.$$
   (b) En déduire que :
$$\mathrm{Im}(S) = \left\{ \left[\frac{X_1}{AX_2}\right] : X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \right\}.$$

B- Etude des valeurs propres de ${}^tAA$ et $A{}^tA$

Pour tout réel λ, on note par :
$$U_\lambda = \mathrm{Ker}({}^tAA - \lambda I_p),$$
$$V_\lambda = \mathrm{Ker}(A{}^tA - \lambda I_{n-p}).$$

1. Montrer que ${}^tAA$ (respectivement $A{}^tA$) appartient à $S_p^+(\mathbb{R})$ (respectivement $S_{n-p}^+(\mathbb{R})$).
2. En déduire que les valeurs propres de ${}^tAA$ (respectivement $A{}^tA$) sont positives.
3. Montrer que $U_0 = \mathrm{Ker}(A)$ et $V_0 = \mathrm{Ker}({}^tA)$.
4. Soit λ un réel non nul.
   (a) Montrer que λ est une valeur propre de ${}^tAA$ si et seulement si λ est une valeur propre de $A{}^tA$.
   (b) Montrer que
   i. $A\left(U_\lambda\right) \subset V_\lambda$.
   ii. ${}^tA\left(V_\lambda\right) \subset U_\lambda$.

   (c) Montrer que si λ est une valeur propre de ${}^tAA$, on a :
   i. $A\left(U_\lambda\right) = V_\lambda$.
   ii. ${}^tA\left(V_\lambda\right) = U_\lambda$.

(d) En déduire que $\dim(U_\lambda) = \dim(V_\lambda)$.

5. **Application :**

On prend $n = 4, p = 3$ et $A = (1, -1, 1)$. En utilisant ce qui précède déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de A^tA et ${}^tAA$.

C- Etude des valeurs propres de S

Pour tout réel λ, on note par :

$$F_\lambda = \operatorname{Ker}(S - \lambda I_n).$$

1. (a) Déterminer F_0.
   (b) En déduire que 0 n'est pas une valeur propre de S si et seulement si ${}^tA$ est injective.
   (c) Déterminer F_1.
   (d) En déduire que 1 n'est pas une valeur propre de S si et seulement si A est injective.

2. Soit λ une valeur propre de S, $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$. Soit $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ avec $X_1 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $X_2 \in \mathcal{M}_{n-p,1}(\mathbb{R})$ telle que $SX = \lambda X$. Montrer que $X_1 = 0_{p,1}$ si et seulement si $X_2 = 0_{n-p,1}$.

3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, on pose :

$$H_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c} I_p \\ \hline \frac{1}{\lambda}A \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

   (a) Montrer que $F_\lambda = H_\lambda\big(U_{\lambda(\lambda-1)}\big)$.
   (b) En déduire que λ est une valeur propre de S si et seulement si $\lambda(\lambda - 1)$ est une valeur propre de ${}^tAA$.
   (c) En déduire que $\frac{1}{2}$ n'est pas valeur propre de S.
   (d) Montrer que si λ est une valeur propre de S alors $\lambda \notin [0, 1]$.

4. On pose :

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} I_p & 0_{p,n-p} \\ \hline 0_{n-p,p} & -I_{n-p} \end{array}\right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

   (a) Montrer que $\Sigma S + S\Sigma = I_n + \Sigma$.
   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$.
      i. Montrer que si λ est une valeur propre de S alors il existe un réel a_λ vérifiant $\big(a_\lambda I_n + \Sigma\big)(F_\lambda) \subset F_{1-\lambda}$.
      ii. En déduire que λ est une valeur propre de S si et seulement $1 - \lambda$ est une valeur propre de S.

5. Conclure de ce qui précède que :

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F_0 \overset{\perp}{\bigoplus} F_1 \quad \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(S)\cap\mathbb{R}^+\backslash\{0,1\}}} F_\lambda \quad \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(S)\cap\mathbb{R}^+\backslash\{0,1\}}} F_{1-\lambda}$$